به نام خداوند خورشید و ماه
که دل را به نامش خرد داد راه

مهروماه

لقمه

تیزهوشان

۱۰۰ نکته

ریاضی نهم

هندسه

نیما نام‌آوری، حامد فرضعلی‌بیک

جلد ۲

مقدمهٔ مدیر گروه

سرعت ... شتاب ... مینیمال شدن ...

اینها شاخصه‌های دنیای امروزند. در این دنیای پرسرعت، گاهی لازم است ما هم با قطار زمان همراه شویم.

این کتاب، یک گردآوری و جمع‌بندی هوشمندانه، سریع، مختصر و مناسب برای دانش‌آموزان کوشای پایهٔ نهم است. از ویژگی‌های این کتاب می‌توان به کوچک بودن، طبقه‌بندی آگاهانه و بیان همهٔ نکات مهم و کلیدی نهم در کمترین فضای ممکن اشاره کرد.

کتاب‌های لقمهٔ گروه ریاضی پایهٔ نهم در دو جلد **حساب** و **هندسه** تألیف شده‌اند که در این حرکت پرشتاب، مکمل و همراه شما هستند.

و اما در این کتاب چه می‌بینید؟

 نمایشگر سرفصل‌های اصلی کتاب که شامل تعدادی  هستند.

 بیانگر بخش‌های اصلی هر سرفصل که بنابر مفاهیم مشترک، چند  در آنها قرار گرفته است.

هر یک از اینها یک نکته از ۱۰۰ نکتهٔ اصلی کتاب است که در آن به آموزش همراه با مثال پرداخته‌ایم.

در هر چه خبر است؟

زیرنکته

نکته‌تر به عنوان زیرنکتهٔ مهم‌تر

مثال

تعدادی پرسش چهارگزینه‌ای با چیدمان آسان به دشوار که در پاسخ‌نامهٔ انتهای کتاب، پاسخ تشریحی آنها را آورده‌ایم.

کتاب‌های **لقمه** را می‌توانید هنگام لقمه گرفتن، در سرویس مدرسه، در مترو و اتوبوس، در زنگ‌های تفریح و هر جای دیگری همراه داشته باشید و به اندازهٔ وقتتان از آنها استفاده کنید.

و اما مؤلفان این کتاب، دو دوست، دو یار، دو مکمل و دو متمم! نیما و حامد عزیز هر دو استثنایی‌اند؛ شگفتا که این کتاب دوگانه‌ای است که در آن دویی نیست.

به یقین، تجربه و ذوق تألیف هر دو بزرگوار به سینرژی منجر شده است که از جمع جبری توانمندی هر یک بیشتر است. امید که شما هم از کتاب لذت ببرید.

خلاصه: **ما فیل هوا کردیم! هر چی نکتهٔ هندسه تو نهمه، یه کتاب کردیم!** (بقیه‌اش را می‌تونید پشت جلد کتاب بخونید!)

قربون صفاتون

بهنام بناپور

فهرست

فصل اوّل: استدلال و اثبات در هندسه

فصل دوم: حجم و مساحت

فصل اوّل

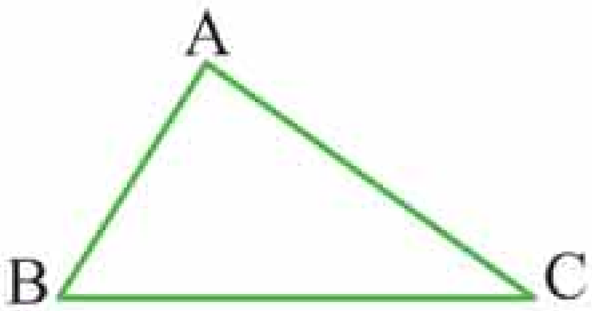
استدلال و اثبات در هندسه

از تالس بیاموزیم رسم استدلال را! مردی که هیچ چیز را به‌راحتی نمی‌پذیرفت و اصرار داشت بر اثبات و استدلال. به یاری او و هم‌فکرانش، هندسه، جانی دوباره گرفت، هم‌نهشتی‌ها پدید آمد، خواص مثلث‌ها و چندضلعی‌ها شکل گرفت، اصول تشابه ظاهر شد و بعد... فیثاغورس! او نیز به فرض، حکم و قضیه ایمانی راسخ داشت؛ و ما نیز فرزندان خلف تفکر آنانیم. مردان راه سخت و مستحکم استدلال.

نامساوی هندسی

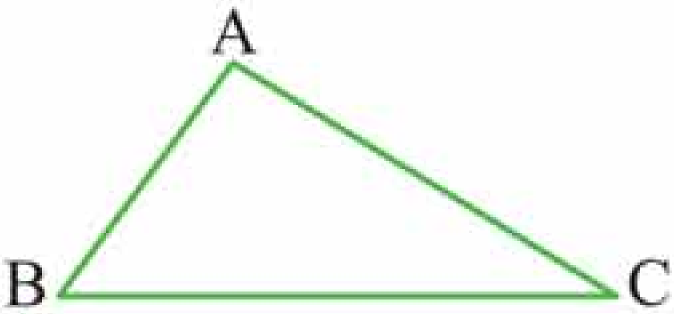
۳ نامساوی زاویهٔ برتر - ضلع برتر

نامساوی زاویهٔ برتر: اگر دو زاویه از مثلثی نابرابر باشند، ضلع روبه‌روی زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌روی زاویهٔ کوچک‌تر است.



$$\widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow \overline{AC} > \overline{AB}$$

نامساوی ضلع برتر: اگر دو ضلع از مثلثی نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌روی ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویهٔ روبه‌روی ضلع کوچک‌تر است.



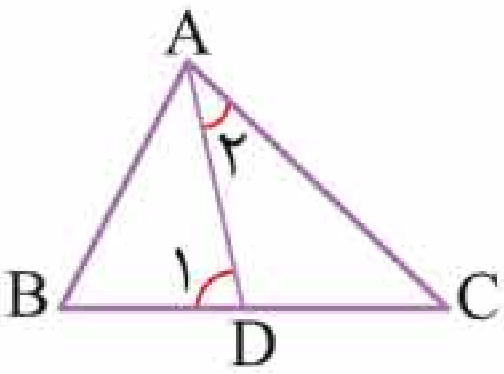
$$\overline{AC} > \overline{AB} \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$$

مثال: اگر در مثلث ABC طول نیمساز زاویهٔ A برابر با ضلع AB باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $\widehat{B} = \widehat{C}$ ۲) $\widehat{B} > \widehat{C}$

۳) $\widehat{B} < \widehat{C}$ ۴) $۲\widehat{B} = \widehat{C}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** برای بررسی درستی گزینه‌ها شکل مقابل را رسم می‌کنیم:



$D_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ADC است؛ بنابراین:

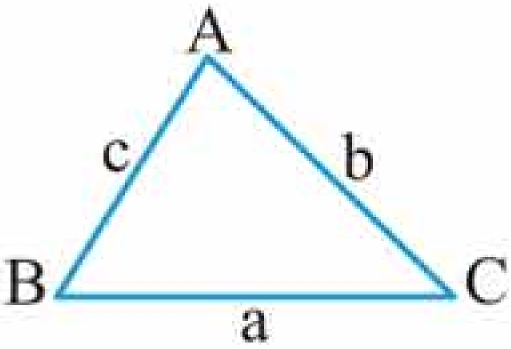
$$\hat{D}_۱ = \hat{C} + \hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{D}_۱ > \hat{C}$$

$$\xrightarrow{\overline{AB}=\overline{AD}\Rightarrow \hat{B}=\hat{D}_۱} \hat{B} > \hat{C}$$

پس فقط گزینهٔ ۲ درست است.

۴ قضیهٔ نامساوی مثلث (قضیهٔ حمار)

● در هر مثلث طول هر ضلع از مجموع طول دو ضلع دیگر کوچک‌تر است:



$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

بنابراین در هر مثلث طول هر ضلع از قدر مطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر و از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است:

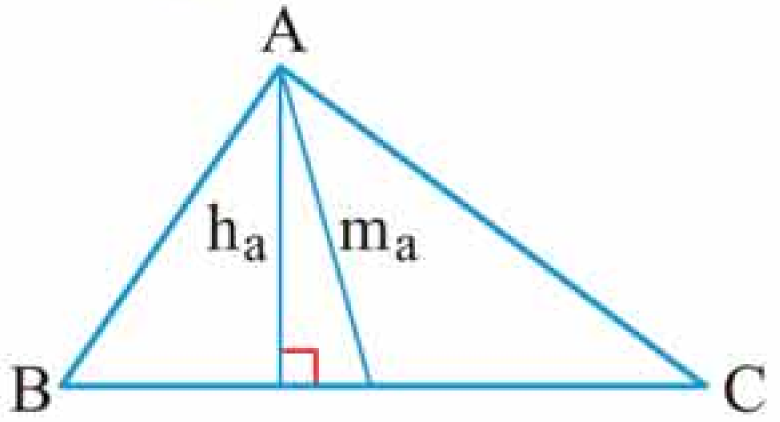
$$|b - c| < a < |b + c|$$

مثال ۱: اگر اندازهٔ سه ضلع مثلثی ۳، $۳m - ۲$ و ۴ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $۱ < m < ۳$
۲) $۱ < m < ۴$
۳) $۳ < m < ۹$
۴) $۱ \leq m \leq ۳$

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$۴ - ۳ < ۳m - ۲ < ۴ + ۳ \Rightarrow ۱ < ۳m - ۲ < ۷$$
$$\Rightarrow ۳ < ۳m < ۹ \Rightarrow ۱ < m < ۳$$



پاسخ **گزینهٔ «۲»**

طبق نکتهٔ گفته‌شده داریم:

$$\left.\begin{array}{l} h_a \le m_a \\ h_b \le m_b \\ h_c \le m_c \end{array}\right\} \xrightarrow{+} h_a + h_b + h_c \le m_a + m_b + m_c \Rightarrow H \le M$$

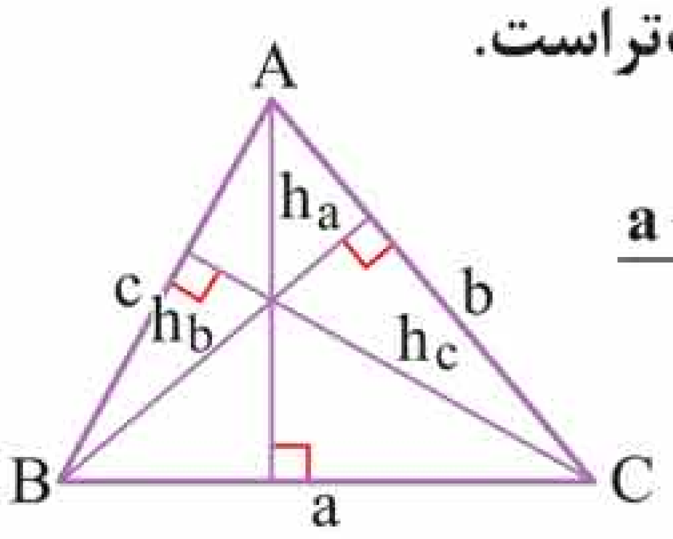
همچنین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} m_a < \dfrac{b+c}{۲} \\ m_b < \dfrac{a+c}{۲} \\ m_c < \dfrac{a+b}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} m_a + m_b + m_c < a+b+c \Rightarrow M < ۲P$$

بنابراین با توجه به رابطه‌های بالا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} H \le M \\ M < ۲p \end{array}\right\} \Rightarrow H \le M < ۲P$$

نکته‌تر: مجموع طول ارتفاع‌های هر مثلث از نصف محیط مثلث، بزرگ‌تر و از محیط مثلث، کوچک‌تر است.



$$\frac{\mathbf{a+b+c}}{\mathbf{۲}} < \mathbf{h_a + h_b + h_c} < \mathbf{a+b+c}$$

مثال ۳: اندازهٔ محیط مثلثی ۴۰ است. محدودهٔ مجموع طول سه ارتفاع این مثلث را بیابید.

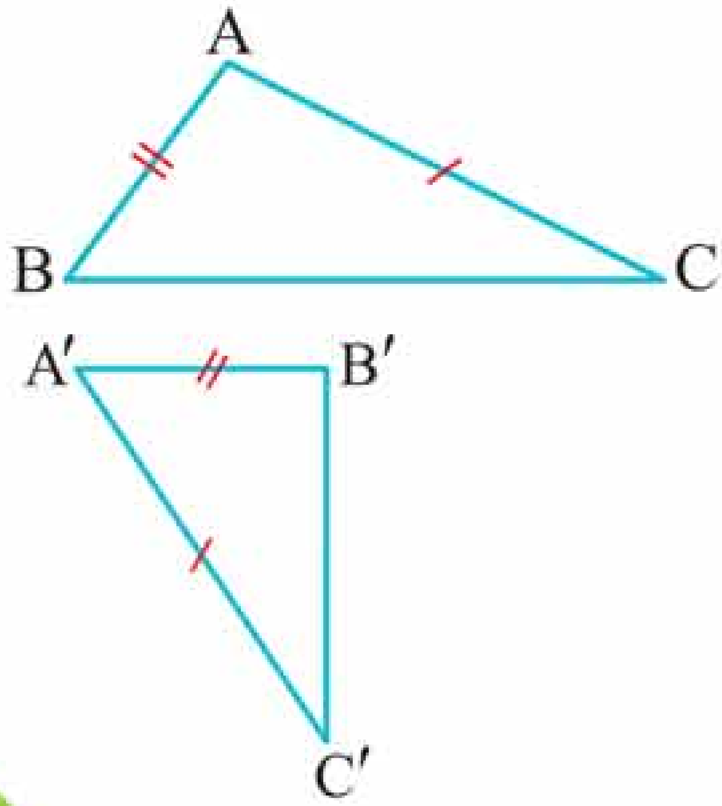
پاسخ $P < h_a + h_b + h_c < ۲P \Rightarrow ۲۰ < h_a + h_b + h_c < ۴۰$

نکته‌تر: اگر h_a ، h_b و h_c ارتفاع‌های یک مثلث باشند، آنگاه با سه پاره‌خط به طول‌های $\frac{۱}{ha}$ ، $\frac{۱}{hb}$ و $\frac{۱}{hc}$ می‌توان یک مثلث ساخت؛ بنابراین معکوس طول ارتفاع‌ها باید در نامساوی مثلث صدق کند:

$$\left|\frac{۱}{h_b} - \frac{۱}{h_c}\right| < \frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c}$$

۶ نامساوی لولا (قیچی)

اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیربه‌نظیر مساوی باشد و زاویهٔ بین این دو ضلع در مثلث اوّل، بزرگ‌تر از زاویهٔ بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آنگاه ضلع سوم از مثلث اوّل، بزرگ‌تر از ضلع سوم از مثلث دوم است.



$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \hat{A'} > \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{B'C'} > \overline{BC}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶. سه پاره‌خط به طول‌های $x+۷$، $۴(x-۱)$ و $۶x$ ضلع‌های یک مثلث هستند. محدودهٔ x کدام است؟

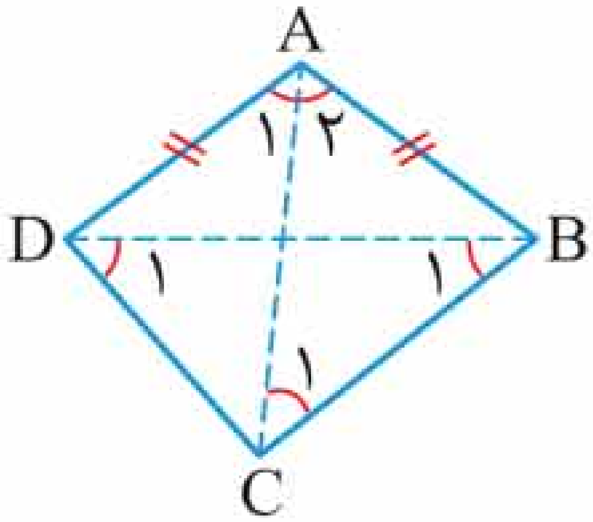
۱) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$

۲) $\frac{۵}{۳} < x < ۳$

۳) $۲ < x < ۳$

۴) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۴$

۷. اگر در چهارضلعی ABCD، $\overline{AB} = \overline{AD}$ و $\overline{BC} > \overline{CD}$، کدام رابطه درست نیست؟



۱) $\widehat{C}_۱ > \widehat{A}_۱$

۲) $\widehat{A}_۲ > \widehat{A}_۱$

۳) $\widehat{D}_۱ > \widehat{B}_۱$

۴) $\widehat{D} > \widehat{B}$

۸. با طول‌های داده‌شده در کدام گزینه می‌توان یک مثلث رسم کرد؟ $(x,y > ۰)$

۱) $x+۱$، $y+۱$ و $x+y$

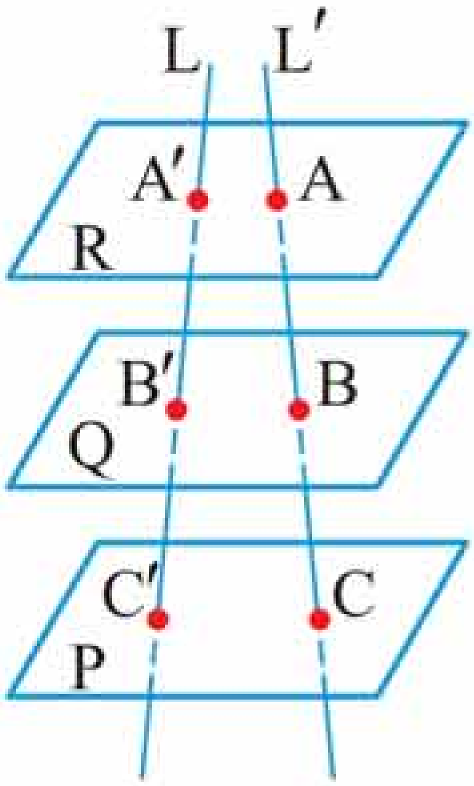
۲) $x^۲$، $(x+۱)^۲$ و $۲x^۲+۳x+۱$

۳) x، y و $x+y+۱$

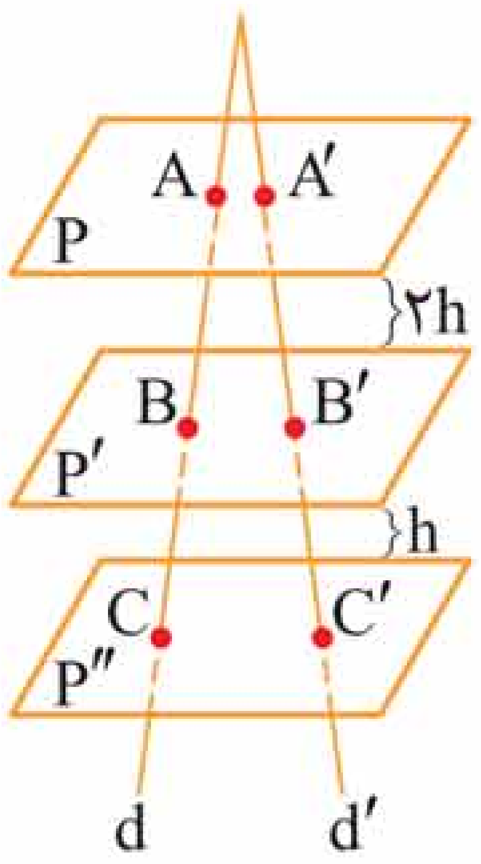
۴) $۲x$، $x-۲$ و $۳x$

۱۳ تالس در فضا

صفحه‌های موازی روی دو خط که آنها را قطع می‌کنند، پاره‌خط هایی متناسب را ایجاد می‌کنند؛ یعنی اگر P، Q و R سه صفحهٔ موازی باشند و دو خط L و L' این دو صفحه را به‌ترتیب در نقطه‌های A، B و C و A'، B' و C' قطع کند، آنگاه:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$



مثال: **دو خطّ متقاطع d و d' سه صفحهٔ موازی P، P' و P'' را قطع کرده‌اند. اگر فاصلهٔ دو صفحهٔ P و P' دو برابر فاصلهٔ دو صفحهٔ P' و P'' و $۳\overline{AC} = ۴\overline{A'B'} = ۲۴$، آنگاه $\overline{BC} + \overline{B'C'}$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱۷}{۳}$
۲) ۶
۳) $\frac{۱۹}{۳}$
۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۱»** طبق نکتهٔ قبل داریم:

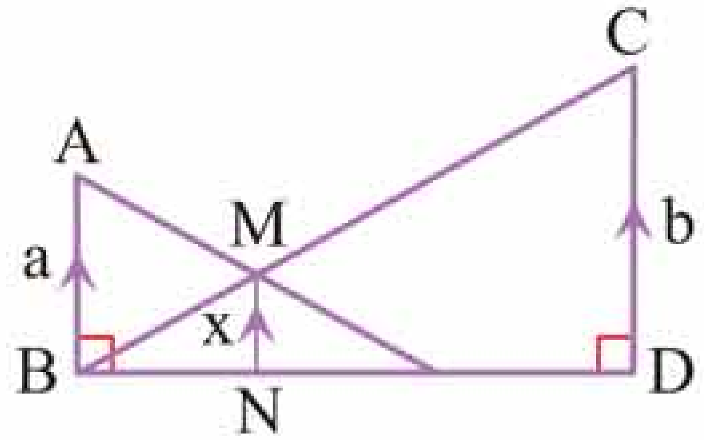
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{۲h}{h} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{۶}{\overline{B'C'}} = ۲ \Rightarrow \overline{B'C'} = ۳$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = ۲ \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = ۳ \xrightarrow{\overline{AC}=۸} \overline{BC} = \frac{۸}{۳}$$

$$\overline{BC} + \overline{B'C'} = \frac{۸}{۳} + ۳ = \frac{۱۷}{۳}$$

۱۴ تالس در شکل‌هایی با بیش از ۲ خطّ موازی

در شکل زیر همواره داریم:



$$\frac{۱}{x} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$$

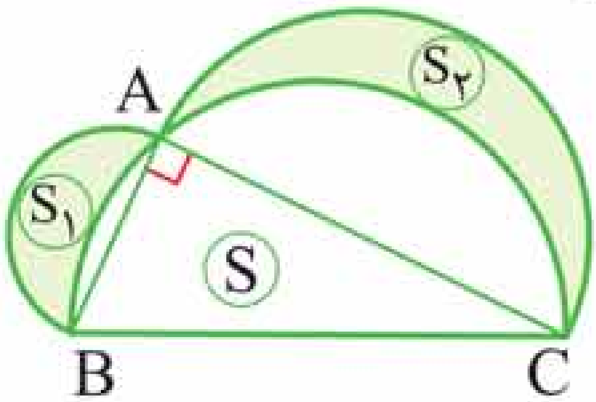
اثبات رابطهٔ بالا به‌صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{\overline{ND}}{\overline{BD}} \\ MN \parallel CD \Rightarrow \dfrac{x}{b} = \dfrac{\overline{BN}}{\overline{BD}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{\overline{ND} + \overline{BN}}{\overline{BD}} = ۱$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}\right) = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} = \frac{۱}{x}$$

مساحت هلالین بقراط

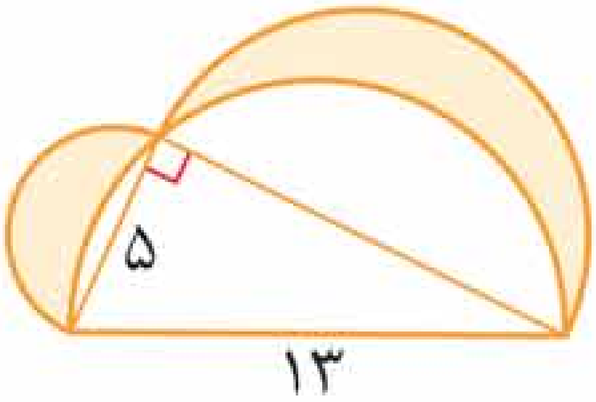
مجموع مساحت‌های دو هلال مشخص‌شده روی شکل زیر با مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر است؛ یعنی:



$$S = S_1 + S_2$$

ضلع‌های BC ، AC و AB در شکل بالا قطرهای نیم‌دایره‌های رسم‌شده هستند.

مثال ۵: در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل سه نیم‌دایره به قطر ضلع‌ها رسم شده است. مساحت ناحیهٔ رنگی را بیابید.



پاسخ

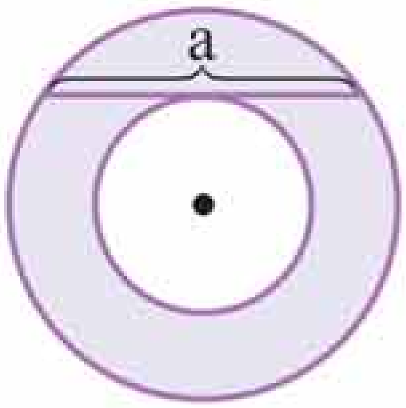
ضلع سوم مثلث قائم‌الزاویه: $x^2 = ۱۶۹ - ۲۵ \Rightarrow x^2 = ۱۴۴$
$\Rightarrow x = ۱۲$

بنابراین مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:

$$S = \frac{۱۲ \times ۵}{۲} = ۳۰$$

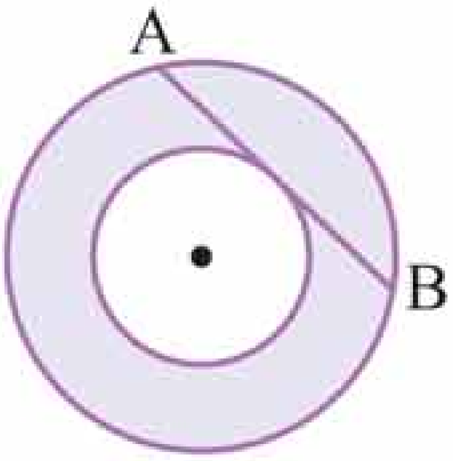
با توجه به نکتهٔ بالا مساحت ناحیهٔ رنگی با مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است؛ پس: $S_{\text{رنگی}} = ۳۰$

نکته‌تر: هرگاه وتری به اندازهٔ a از یک دایره بر دایره‌ای هم‌مرکز و کوچک‌تر از دایرهٔ اوّل مماس شده باشد، مساحت فضای بین دو دایره برابر است با:



$$S = \pi(\frac{a}{۲})^۲ = \frac{\pi}{۴}a^۲$$

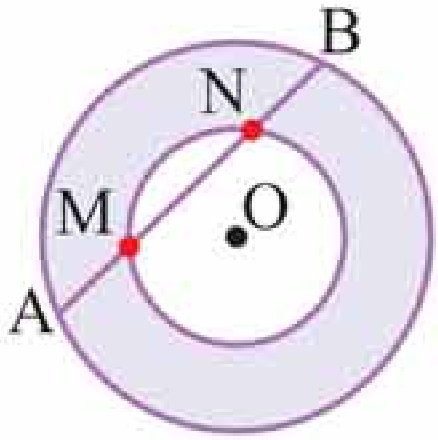
مثال ۶: دو دایرهٔ نشان‌داده شده در شکل زیر هم‌مرکزند. وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس و طولش برابر ۱۶ است. مساحت ناحیهٔ رنگی را بیابید.



پاسخ

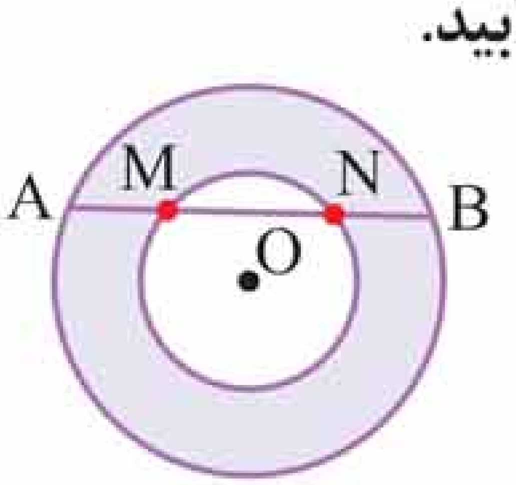
$$S_{رنگی} = \frac{\pi}{۴} \times ۱۶^۲ = ۶۴\pi$$

نکته‌تر: اگر مانند شکل زیر دو دایرهٔ هم‌مرکز با شعاع‌های غیریکسان، وتر مشترکی داشته باشند، مساحت قسمت محصور بین دو دایره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$S = \frac{\pi}{۴}(\overline{AB}^۲ - \overline{MN}^۲)$$

مثال ۷: مساحت ناحیهٔ رنگی بین دو دایرهٔ هم‌مرکز زیر با وترهای $\overline{AB} = ۲۰$ و $\overline{MN} = ۱۶$ سانتی‌متر را بیابید.



پاسخ

$$S = \frac{\pi}{۴}(۲۰^۲ - ۱۶^۲) = ۳۶\pi$$

فصل دوم

حجم و مساحت

بُعد سوم ما را فراگرفته است. نمی‌توانیم به طول و عرض بیندیشیم و ارتفـاع را از یاد ببریم. زندگی بدون ارتفاع، گنجایش هیچ چیز را ندارد! باور کنید...

معماران با بعد سوم معمار شدند و از طراحان سبقت گرفتند.

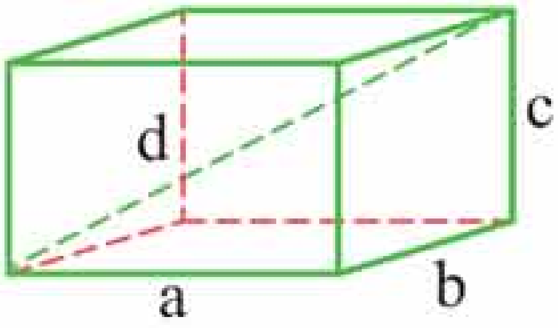
باید معمار بود که قدر مکعب، استوانه، مخروط و هرم را دریافت و آنان را ارج نهاد. چنان‌چه معماران مصر، قدردان اهرام بودند و ما قدردان مصر؛

و البته که هر حجمی سطحی دارد و مساحتی. هرچه باشد راه بُعد سوم از بُعد دوم می‌گذرد.

مکعب‌مستطیل

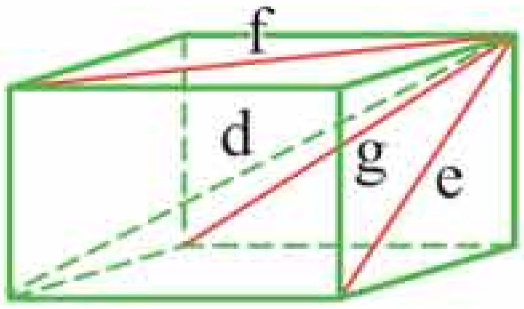
۵۱ قطر

قطر مکعب‌مستطیل پاره‌خطی است که دو رأس غیرواقع بر یک صفحه (وجه) را به هم وصل می‌کند و اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



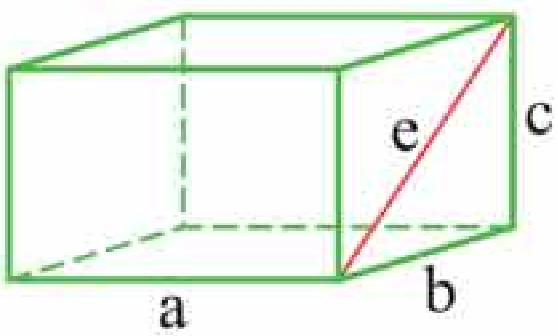
$$d = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$$

همچنین d (اندازهٔ قطر مکعب‌مستطیل) را می‌توان برحسب قطرهای مختلف وجه‌ها نیز محاسبه کرد:



$$d = \sqrt{\frac{e^۲ + f^۲ + g^۲}{۲}}$$

نکته‌تر: قطر هر وجه مکعب‌مستطیل به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید؛ برای مثال در شکل زیر داریم:



$$\mathbf{e = \sqrt{c^۲ + b^۲}}$$

اگر طول یال‌های مکعب‌مستطیلی n برابر شود، قطر آن نیز n برابر می‌شود.

مثال ۱: **اگر قطروجه‌های مکعب‌مستطیلی $\sqrt{۲}$ ، $۲\sqrt{۳}$ و $۳\sqrt{۲}$ باشد، قطر این مکعب‌مستطیل چقدر است؟**

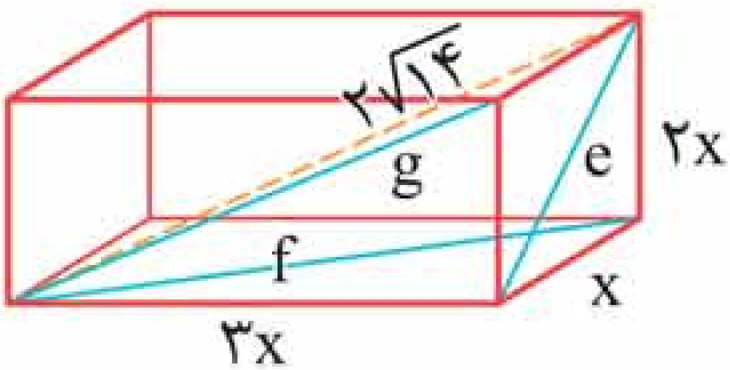
پاسخ

$$d=\sqrt{\frac{(\sqrt{۲})^{۲}+(۲\sqrt{۳})^{۲}+(۳\sqrt{۲})^{۲}}{۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{۲+۱۲+۱۸}{۲}}=\sqrt{۱۶}=۴$$

مثال ۲: **طول یال‌های مکعب‌مستطیلی به قطر $۲\sqrt{۱۴}$ با نخستین سه عدد طبیعی متناسب است. کدام‌یک از عددهای زیر جزء قطروجه‌های این مکعب‌مستطیل است؟**

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۱۳}$ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$



پاسخ **گزینهٔ «۲»** یال‌ها با عددهای ۱، ۲ و ۳ متناسب‌اند؛ بنابراین آنها را به‌ترتیب x ، ۲x و ۳x در نظر می‌گیریم؛ پس:

$$۲\sqrt{۱۴}=\sqrt{x^{۲}+(۲x)^{۲}+(۳x)^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۵۶=x^{۲}+۴x^{۲}+۹x^{۲}\Rightarrow ۱۴x^{۲}=۵۶\Rightarrow x^{۲}=۴$$

$$\Rightarrow x=۲\Rightarrow \text{اندازه یال‌ها}=۲,۴,۶$$

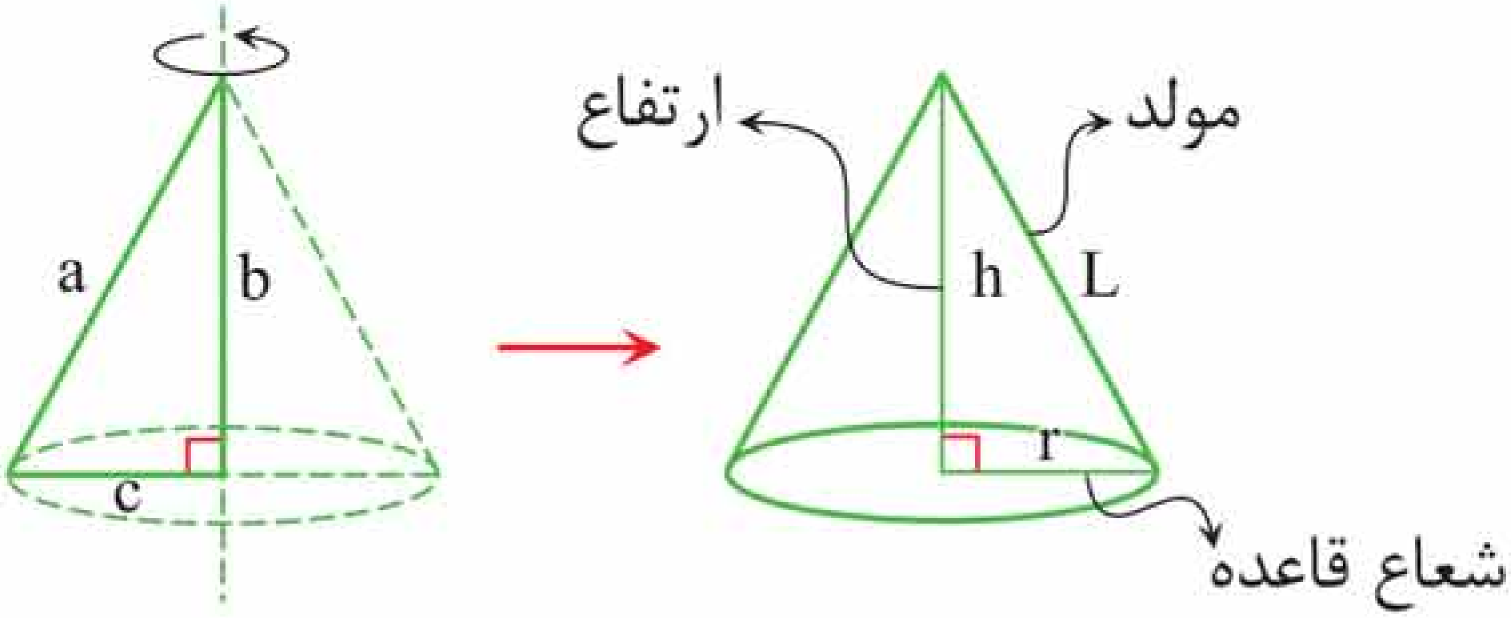
حالا قطرهای مکعب‌مستطیل را محاسبه می‌کنیم:

$$e=\sqrt{۲^{۲}+۴^{۲}}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\ ,\ f=\sqrt{۲^{۲}+۶^{۲}}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

مخروط

۷۴ تعریف مخروط

اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول یکی از ضلع‌های قائمه‌اش ۳۶۰ درجه دوران دهیم، شکل حاصل مخروط قائم نام دارد.

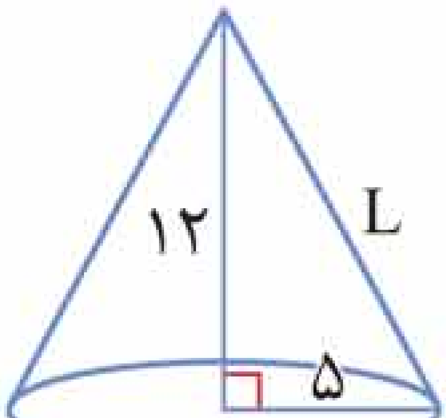


$r = c, h = b, l = a$ $\qquad$ $L^{۲} = h^{۲} + r^{۲}$

مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های قائمهٔ ۵ و ۱۲ سانتی‌متر را حول ضلع قائمهٔ بزرگ‌تر یک دوران کامل می‌دهیم. مولد مخروط حاصل چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۵ $\qquad$ ۲) ۱۷ $\qquad$ ۳) ۱۳ $\qquad$ ۴) ۱۴

پاسخ گزینهٔ «۳»



$$L^{۲} = ۱۲^{۲} + ۵^{۲} = ۱۶۹ \Rightarrow L = ۱۳cm$$

۷۵ مساحت جانبی

مساحت جانبی مخروط قائم (که جزء حجم‌های هرمی منتظم محسوب می‌شود) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

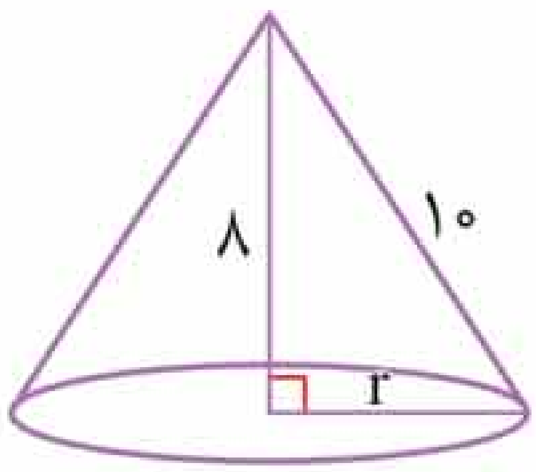
$$S_{\text{جانبی}} = \pi r L$$

(مساحت جانبی همان $\frac{\text{مولد مخروط} \times \text{محیط قاعده}}{۲}$ است.)

مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که وتر آن ۱۰ سانتی‌متر و یکی از ضلع‌های قائمه‌اش ۸ سانتی‌متر است، حول ضلع ۸ سانتی‌متری آن دوران ۳۶۰ درجه‌ای می‌دهیم. مساحت جانبی شکل حاصل چند سانتی‌مترمربع است؟

۱) ۷۲π ۲) ۳۶π ۳) ۴۸π ۴) ۶۰π

پاسخ گزینهٔ «۴»



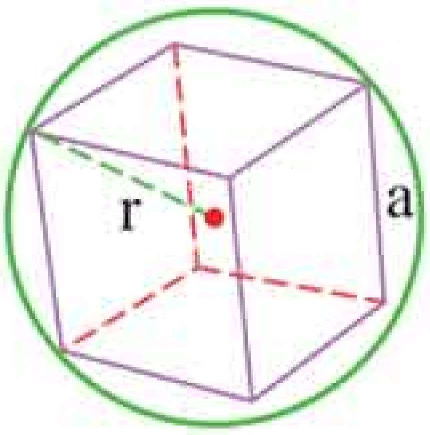
$$r^۲ = ۱۰^۲ - ۸^۲ = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶ \Rightarrow r = ۶cm$$

$$S_{\text{جانبی}} = \pi r L = \pi \times ۶ \times ۱۰ = ۶۰\pi \ cm^۲$$

حجم‌های محیطی و محاطی

۹۵ کرهٔ محیط بر مکعب

اگر کره‌ای بر یک مکعب محیط شود (همهٔ رأس‌های مکعب روی سطح داخلی کره قرار گیرد)، قطر کره بر قطر مکعب منطبق می‌شود؛ در این حالت می‌گوییم مکعب درون کره محاط شده است.



اگر شعاع کره را r و یال مکعب را a در نظر بگیریم، داریم: $r = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

مثال: در کره‌ای به شعاع ۲۱ سانتی‌متر، یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم مکعب به حجم کره کدام است؟ ($\pi \simeq ۳$)

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

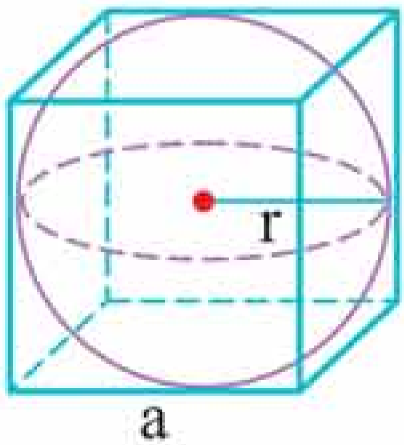
پاسخ گزینهٔ «۱»

قطر مکعب به یال a: $\sqrt{۳}a = ۴۲ \Rightarrow a = \frac{۴۲}{\sqrt{۳}}\,\frac{\times\sqrt{۳}}{\times\sqrt{۳}} = ۱۴\sqrt{۳}\,cm$

$$\frac{V_{\text{مکعب}}}{V_{\text{کره}}} = \frac{(۱۴\sqrt{۳})^{۳}}{\frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۲۱^{۳}} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۱۴}}\times\overset{\cancel{۲}}{\cancel{۱۴}}\times\overset{\cancel{۲}}{\cancel{۱۴}}\times\cancel{۳}\sqrt{۳}}{\underset{۳}{\cancel{۲۱}}\times\underset{۳}{\cancel{۲۱}}\times\underset{\cancel{۳}}{\cancel{۲۱}}\times\cancel{۴}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$$

۹۶ مکعب محیط بر کره

اگر مکعبی بر یک کره محیط شود (همهٔ وجه‌های مکعب بر سطح کره مماس شود)، قطر کره با یال مکعب برابر است؛ در این حالت می‌گوییم کره درون مکعب محاط شده است.



اگر شعاع کره را r و یال مکعب را a در نظر بگیریم، داریم: $r = \frac{a}{۲}$

مثال: مکعبی به قطر $\sqrt{۱۲}$ سانتی‌متر بر یک کره محیط شده است. حجم کره چند لیتر است؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱) ۴ ۲) ۳۲ ۳) ۰/۰۳۲ ۴) ۰/۰۰۴

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

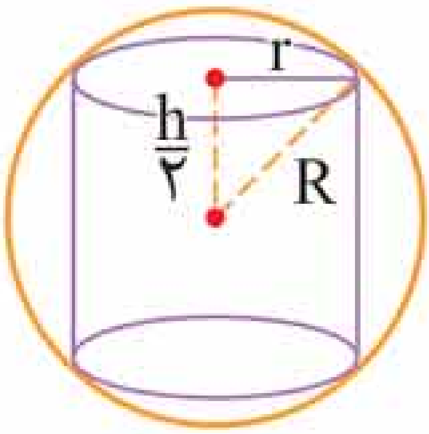
$$\sqrt{۳}a = \sqrt{۱۲} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۱۲}}{\sqrt{۳}} = ۲cm \Rightarrow r = ۱cm$$

$$\Rightarrow V_{کره} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{\cancel{۳}} \times \cancel{۳} \times ۱^۳ = ۴cm^۳ = ۰/۰۰۴lit$$

نکته‌تر: اندازهٔ شعاع کرهٔ محیط بر یک مکعب، $\sqrt{۳}$ برابر اندازهٔ شعاع کرهٔ محاط در همان مکعب است؛ همچنین اندازهٔ ضلع مکعب محیط بر یک کره، $\sqrt{۳}$ برابر اندازهٔ ضلع مکعب محاط در همان کره است.

۹۷ کرهٔ محیط بر استوانه

اگر کره‌ای به شعاع R بر یک استوانه به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h محیط شود، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$R^۲ = r^۲ + (\frac{h}{۲})^۲$$

در این حالت می‌گوییم استوانه درون کره محاط شده است.

مثال: کره‌ای به قطر ۱۰ سانتی‌متر بر یک استوانه به شعاع ۳ سانتی‌متر محیط شده است. حجم استوانه چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) ۳۶π
۲) ۴۸π
۳) ۷۲π
۴) ۵۴π

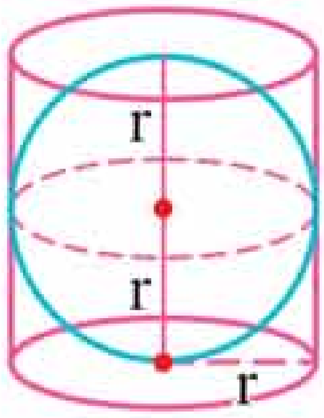
پاسخ گزینهٔ «۳»

$$R^۲ = r^۲ + (\frac{h}{۲})^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۳^۲ + (\frac{h}{۲})^۲ \Rightarrow (\frac{h}{۲})^۲ = ۱۶ \Rightarrow \frac{h}{۲} = ۴$$

$$\Rightarrow h = ۸cm \Rightarrow V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \pi \times ۳^۲ \times ۸ = ۷۲\pi$$

۹۸ استوانهٔ محیط بر کره

اگر استوانه‌ای بر یک کره محیط شود، قطر کره با قطر قاعدهٔ استوانه و ارتفاع استوانه برابر است؛ در این حالت می‌گوییم کره درون استوانه محاط شده است و حجم کره، $\frac{۲}{۳}$ حجم استوانه است.



مثال: کره‌ای به شعاع ۶ سانتی‌متر درون یک استوانه محاط شده است. حجم استوانه برحسب سی‌سی کدام است؟

۱) ۵۴π ۲) ۵۲π ۳) ۵۰π ۴) ۴۶π

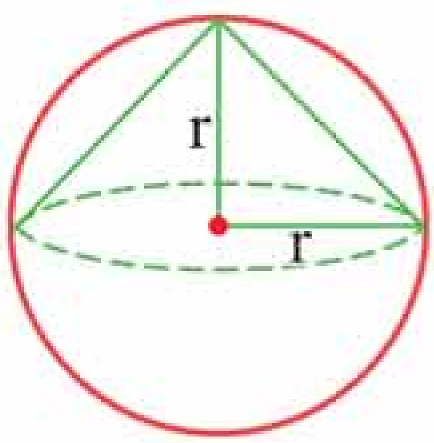
پاسخ گزینهٔ «۱»

$$\text{استوانه}: \begin{cases} r = ۳cm \\ h = ۶cm \end{cases} \Rightarrow V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \pi \times ۳^۲ \times ۶$$

$$= ۵۴\pi cm^۳ \, (cc)$$

۹۹ نیم‌کرهٔ محیط بر مخروط

اگر نیم‌کره بر یک مخروط قائم محیط شود، شعاع نیم‌کره با شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع آن برابر است؛ در این حالت می‌گوییم مخروط قائم درون نیم‌کره محاط شده است.




پاسخ نامه

دایـره را حداکثر در دو نقطه قطع کند؛ بنابراین حداکثر ۴ نقطه با خاصیت مطلوب یافت می‌شود.

۶. گزینۀ «۱» باید مجموع طول هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر باشد:

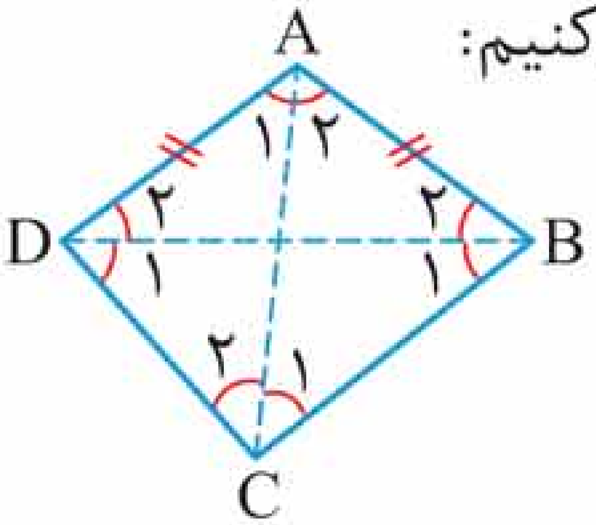
$$۴x - ۴ + x + ۷ > ۶x \Rightarrow -x > -۳ \Rightarrow x < ۳$$

$$۴x - ۴ + ۶x > x + ۷ \Rightarrow ۹x > ۱۱ \Rightarrow x > \frac{۱۱}{۹}$$

$$x + ۷ + ۶x > ۴x - ۴ \Rightarrow ۳x > -۱۱ \Rightarrow x > -\frac{۱۱}{۳}$$

همچنیـن بایـد x بزرگ‌تـر از صفـر $(x > ۰)$ باشـد؛ بنابرایـن بـا اشتراک محدوده‌های به‌دست آمده داریم: $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$

۷. گزینۀ «۱» سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



گزینۀ ۲: $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADC} : \begin{cases} \overline{AC} = \overline{AC} \\ \overline{AD} = \overline{AB} \\ \overline{BC} > \overline{DC} \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{عکس قضیۀ لولا}} \widehat{A}_۲ > \widehat{A}_۱$

گزینهٔ ۳: $\overset{\triangle}{BCD}: \xrightarrow[\text{قضیهٔ زاویهٔ برتر}]{\overline{BC}>\overline{CD}} \widehat{D}_۱ > \widehat{B}_۱$

گزینهٔ۴: $\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ADB}: \widehat{D}_۲ = \widehat{B}_۲ \\ \widehat{D}_۱ > \widehat{B}_۱\end{array}\right\} \xrightarrow{+} \underbrace{\widehat{D}_۱+\widehat{D}_۲}_{\widehat{D}} > \underbrace{\widehat{B}_۱+\widehat{B}_۲}_{\widehat{B}} \Rightarrow \widehat{D}>\widehat{B}$

۸. گزینهٔ «۱» باید مجموع طول دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر باشد؛ بنابراین گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $\begin{cases} x+۱+y+۱>x+y \Rightarrow x+y+۲>x+y \\ x+۱+x+y>y+۱ \Rightarrow ۲x+y+۱>y+۱ \\ y+۱+x+y>x+۱ \Rightarrow ۲y+x+۱>x+۱ \end{cases}$ ✓

گزینهٔ ۲: $x^۲+x^۲+۲x+۱ \not> ۲x^۲+۳x+۱$ ×

گزینهٔ ۳: $x+y \not> x+y+۱$ ×

گزینهٔ ۴: $x-۲+۲x \not> ۳x$ ×

۹. گزینهٔ «۳» طبق نامساوی مثلثی داریم

$$\left.\begin{array}{r} ۷-۵<a<۷+۵ \Rightarrow ۲<a<۱۲ \\ a\geq ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow ۸\leq a<۱۲$$

همان‌طور که می‌دانیم:

محیط مثلث> مجموع سه میانهٔ مثلث> (محیط مثلث)$\frac{۳}{۴}$

محیط ماکزیمم $= ۱۲+۷+۵ = ۲۴$

محیط مینیمم $= ۸+۷+۵ = ۲۰$

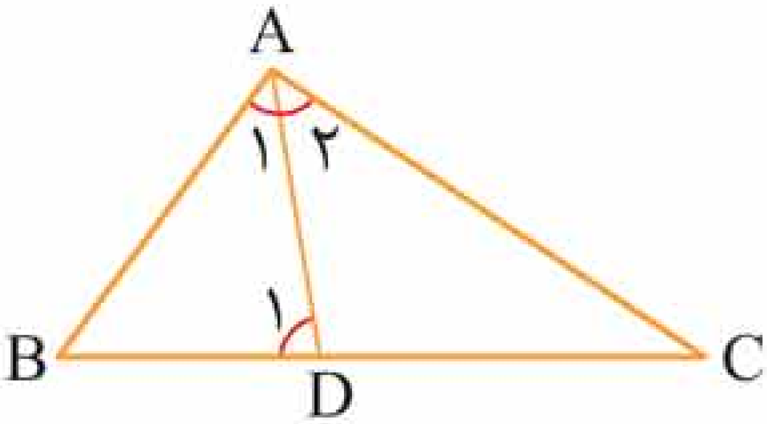
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}(۲۰) < m_a + m_b + m_c < ۲۴$$

فقط ۱۹ در این محدوده قرار دارد.

۱۰. گزینهٔ «۴» طبق قضیهٔ نامساوی ضلع برتر در هر مثلث، زاویهٔ روبه‌روی ضلع بزرگ‌تر، از زاویهٔ روبه‌روی ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است؛ بنابراین:

$$c-a>0 \Rightarrow c>a \xrightarrow{+c} c+c>a+c$$
$$\xrightarrow{a+c=۲b} ۲c>۲b \Rightarrow c>b \Rightarrow \widehat{C}>\widehat{B} \qquad ①$$
$$c>a \xrightarrow{+a} a+c>a+a$$
$$\xrightarrow{a+c=۲b} ۲b>۲a \Rightarrow b>a \Rightarrow \widehat{B}>\widehat{A} \qquad ②$$
$$①,② \Rightarrow \widehat{C}>\widehat{B}>\widehat{A}$$

۱۱. گزینهٔ «۱»



$\widehat{D}_۱ = \widehat{A}_۲ + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{D}_۱ > \widehat{A}_۲$ (زاویهٔ خارجی $\overset{\triangle}{ADC}$)

$$\xrightarrow{\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲} \widehat{D}_۱ > \widehat{A}_۱ \xrightarrow[\text{در مثلث } ABC]{\text{قضیهٔ زاویهٔ برتر}} \overline{AB} > \overline{BD}$$

۱۲. گزینهٔ «۲» برای اینکه m_a، m_b و m_c میانه‌های مثلث ABC باشند، باید در نامساوی مثلثی صدق کنند؛ بنابراین: